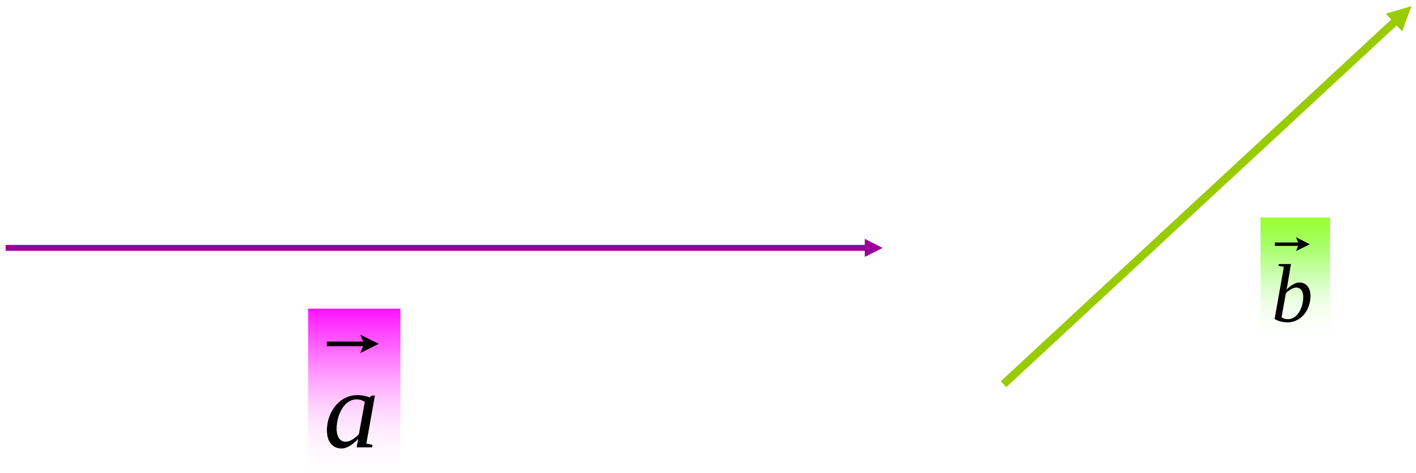
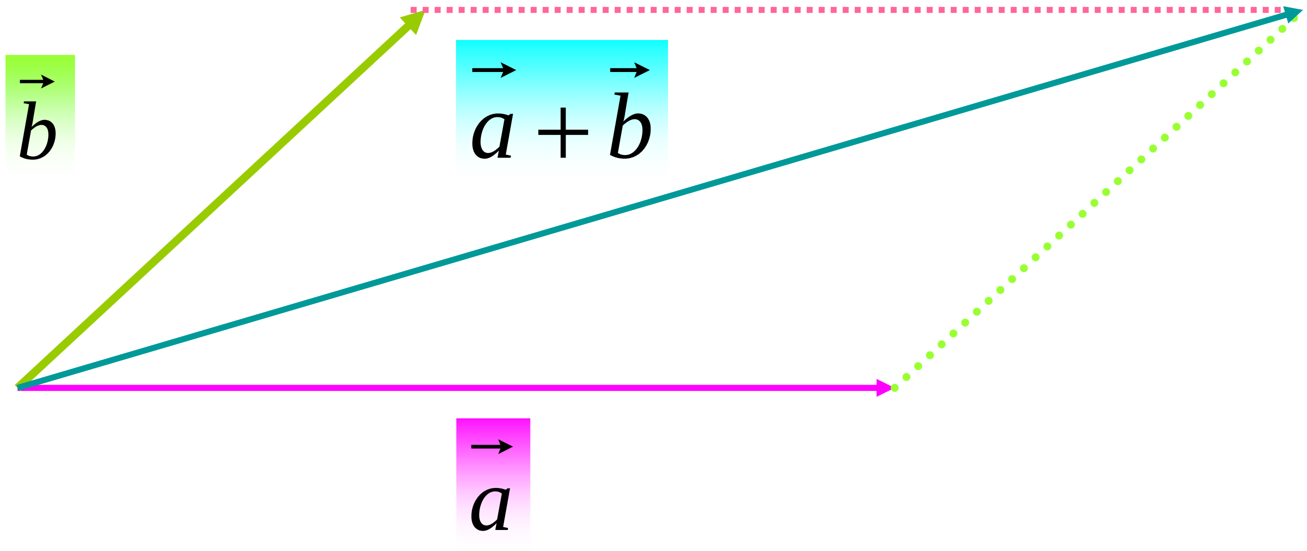
4-2 向量基本運算

向量加法

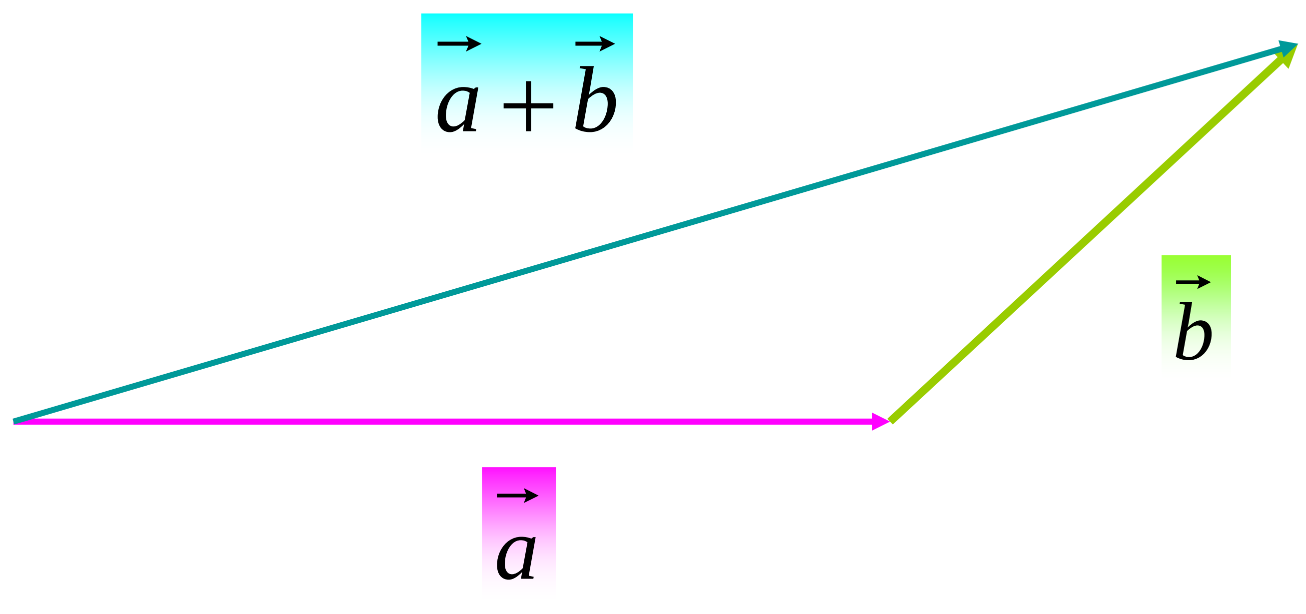
已知向量 $\vec{a}$ 與向量 $\vec{b}$



平行四邊形法則

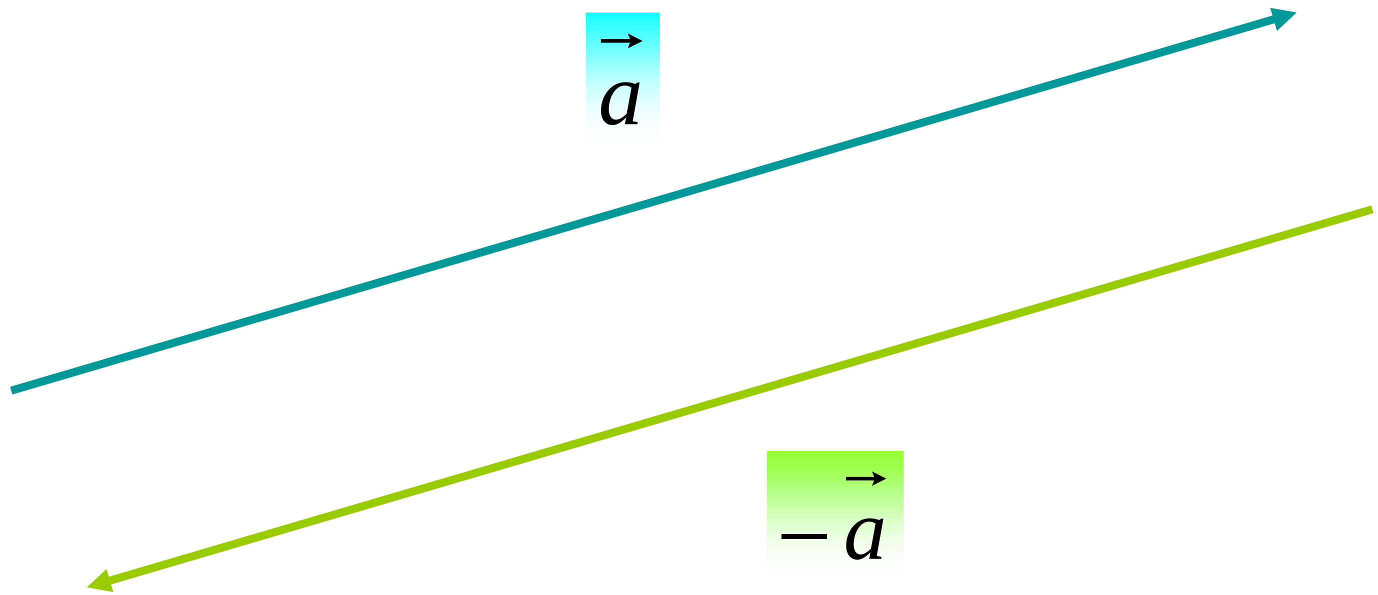


三角形法则



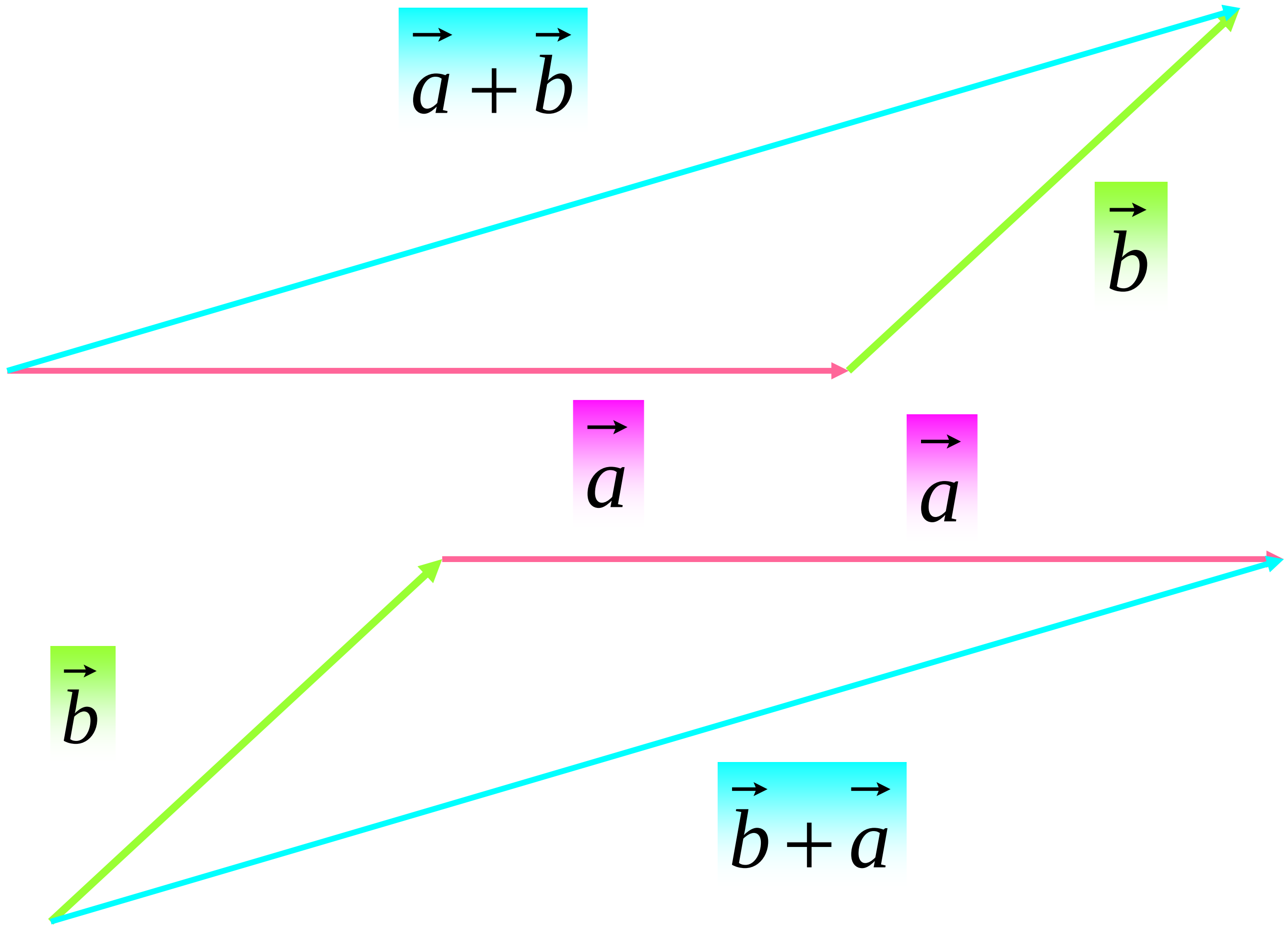
反向量

與向量 $\vec{a}$ 長度相同、方向相反的向量稱爲 $\vec{a}$ 的反向量，記作 $-\vec{a}$



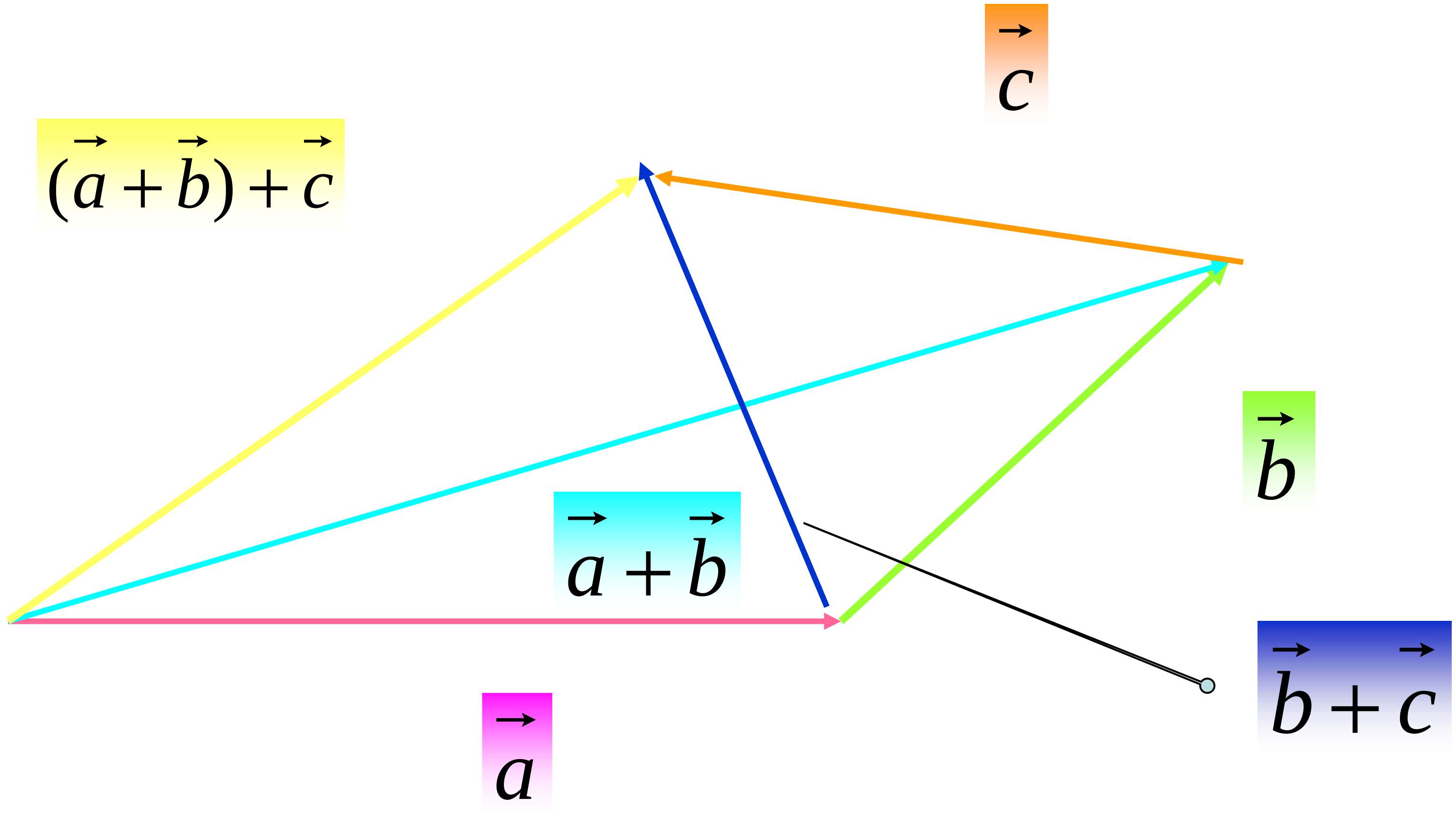
向量加法的運算規律 (1)

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$ (交換律)



向量加法的運算規律 (2)

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$ 結合律

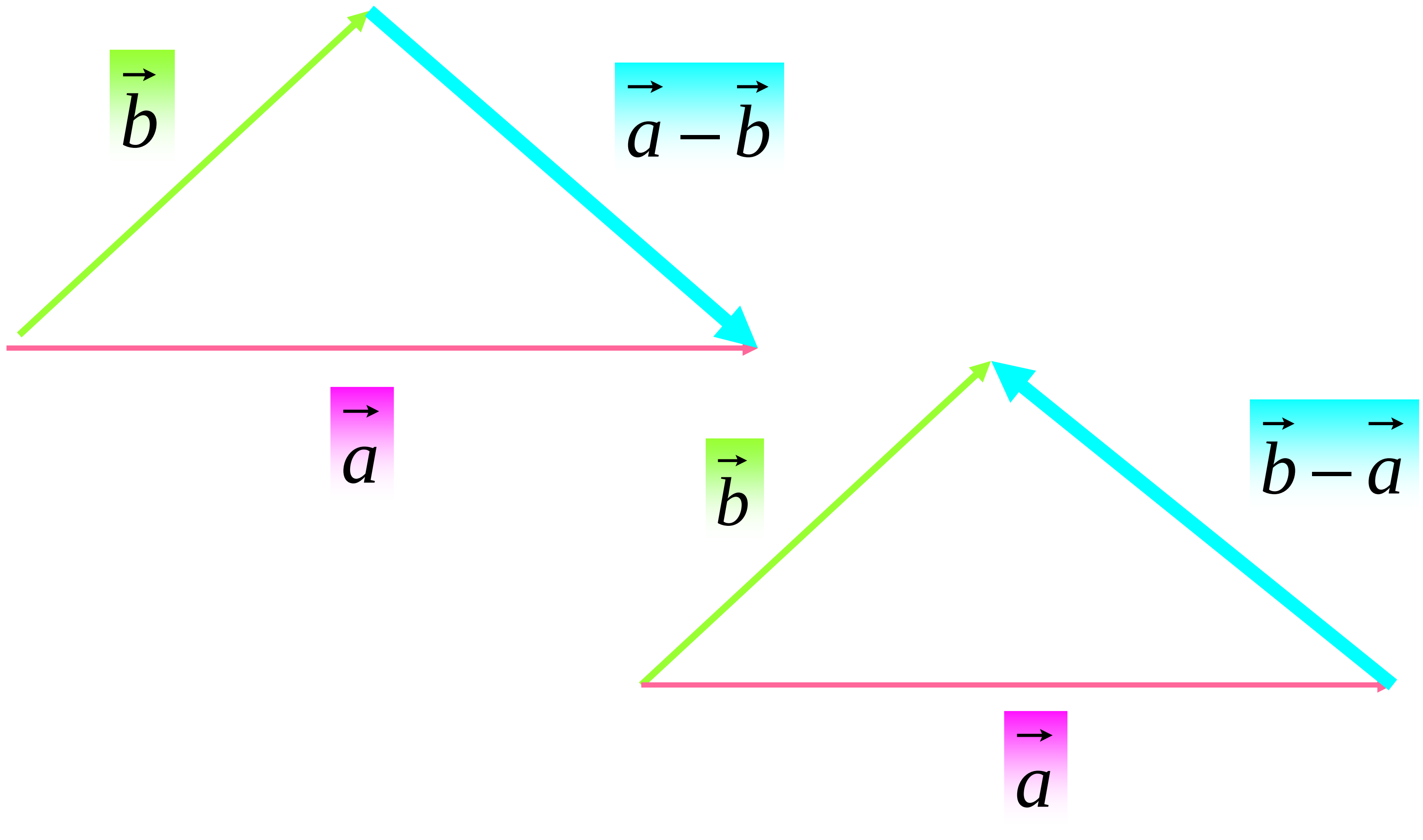


向量加法的運算規律（3）與（4）

(3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

(4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

向量减法



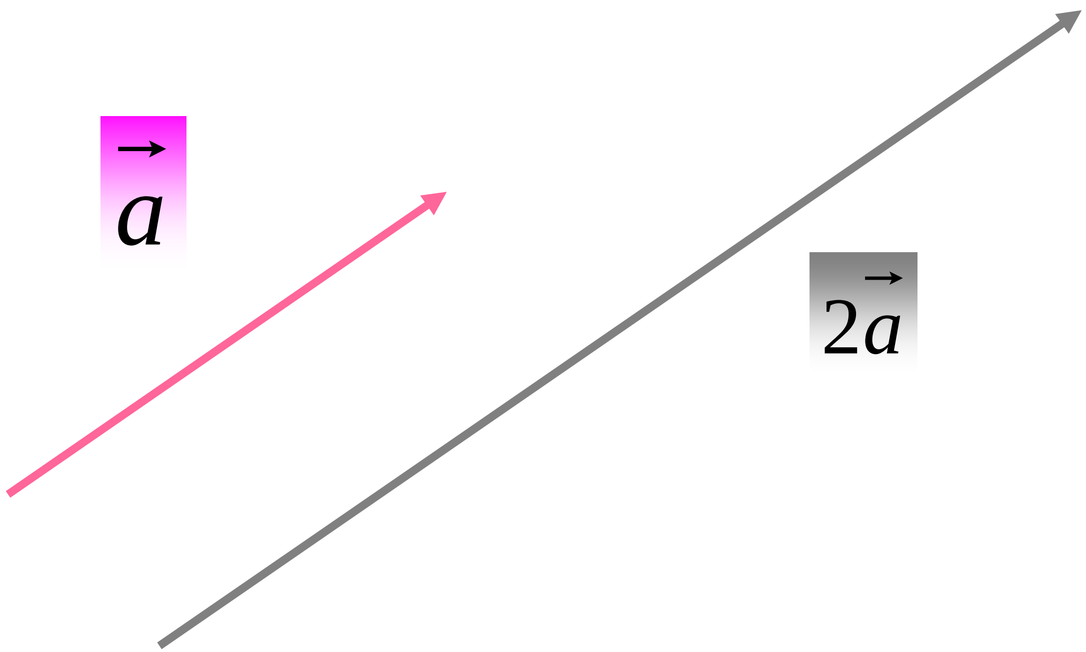
數乘向量

k爲一實數

當k>0，向量 $\vec{ka}$ 代表與 $\vec{a}$ 同方向且

$$\left\|k\vec{a}\right\| = k\left\|\vec{a}\right\|$$

例如

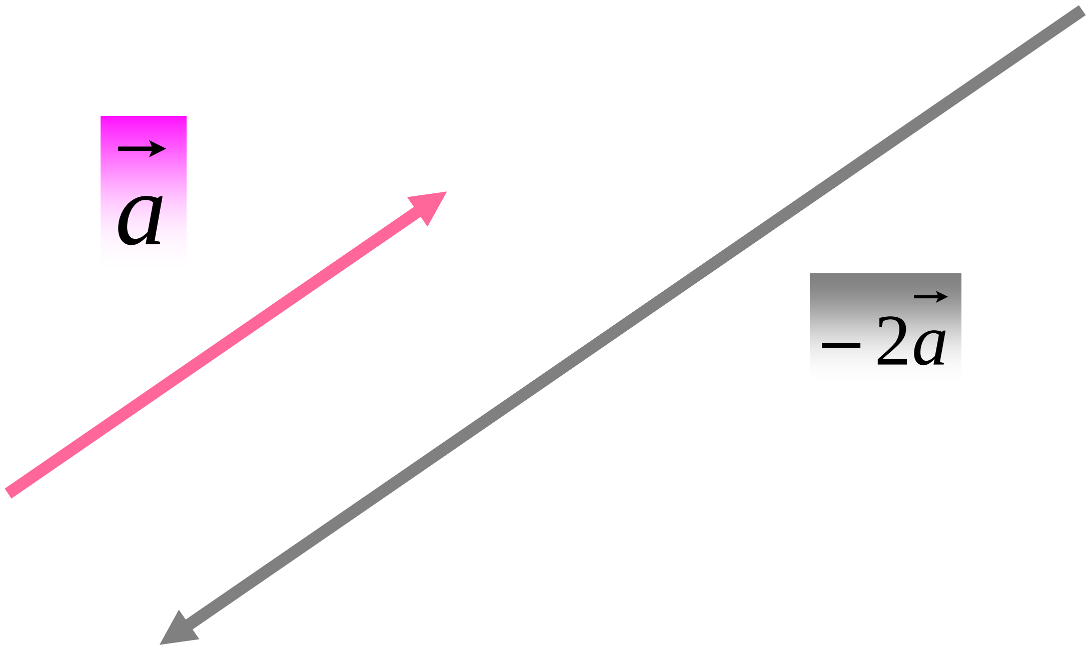


數乘向量

當$k<0$，向量 $k\vec{a}$ 代表與 $\vec{a}$ 反方向且

$$\left\|k\vec{a}\right\| = |k|\left\|\vec{a}\right\|$$

例如



數乘向量之運算規律

(1) $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a} = k(m\vec{a})$

(2) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

(3) $(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$

在直角座標系中

若

$$\vec{a} = < a_x, a_y, a_z >$$

$$\vec{b} = < b_x, b_y, b_z >$$

則

$$\vec{a} + \vec{b} = < a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z >$$

$$\vec{a} - \vec{b} = < a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z >$$

$$k\vec{a} = < ka_x, ka_y, ka_z >$$

向量內積

在力學中

一質點在力 $\vec{F}$ 作用下經過位移 $\vec{a}$

則力 $\vec{F}$ 對質點所做的功w為

$$W = \|\vec{F}\|\|\vec{a}\| \cos < \vec{F}, \vec{a} >$$

其中 $< \vec{F}, \vec{a} >$ 代表向量 $\vec{F}$ 與 $\vec{a}$ 小於 π 之夾角

內積的定義 1

$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的內積是一個實數，其值為

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos<\vec{a},\vec{b}>$$
$$= \|\vec{a}\| pro_{\vec{a}}\vec{b}$$
$$= \|\vec{b}\| pro_{\vec{b}}\vec{a}$$

其中 $<\vec{a},\vec{b}>$ 代表向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 小於 π 之夾角

內積的定義 2

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ 也稱爲 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的點積，又稱純量積

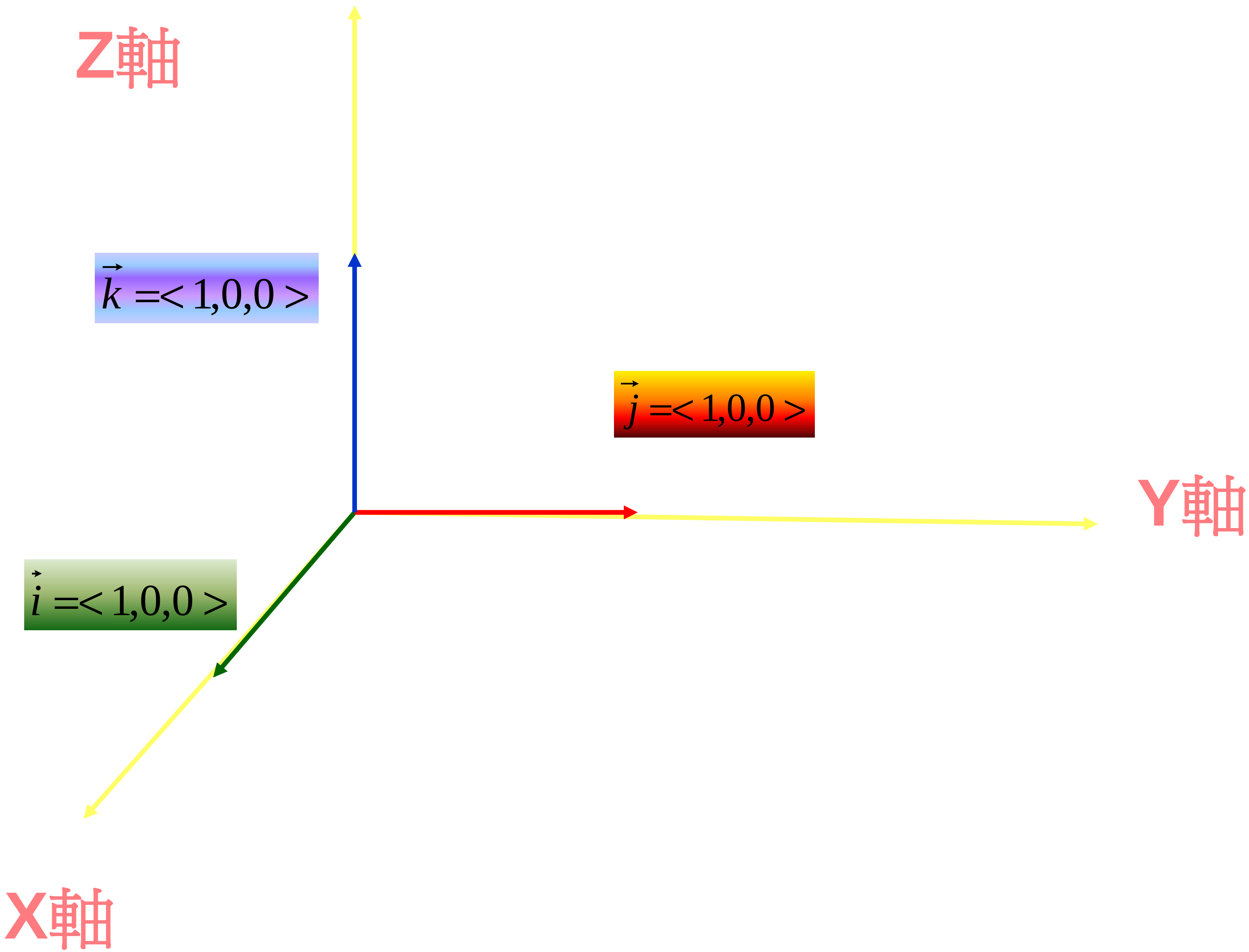
若 $\vec{a}=\vec{0}$ 或 $\vec{b}=\vec{0}$ 則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

向量內積之運算規律

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (交換律)

(2) $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (結合律)

(3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ (分配律)



Z軸
$\vec{k} =< 1,0,0 >$
$\vec{j} =< 1,0,0 >$
Y軸
$\vec{i} =< 1,0,0 >$
X軸

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\left|\vec{i}\right|\left|\vec{i}\right|\cos<\vec{i},\vec{i}>$$

$$\left|\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|=\left|\vec{k}\right|=1$$

$$=1\times1\times\cos 0^\circ$$

$$<\vec{i},\vec{i}>=<\vec{j},\vec{j}>=\left\langle\vec{k},\vec{k}\right\rangle=0^\circ$$

$$=1\times1\times1$$

$$=1$$

$$\cos 0^\circ=1$$

$\therefore$ $$\vec{i}\cdot\vec{i}=1$$

同理 $$\vec{j}\cdot\vec{j}=1$$

$$\vec{k}\cdot\vec{k}=1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\left\|\vec{i}\right\|\left\|\vec{j}\right\|\cos<\vec{i},\vec{j}>$$

$$\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=\left\|\vec{k}\right\|=1$$

$$=1\times1\times\cos 90^\circ$$

$$<\vec{i},\vec{j}>=<\vec{j},\vec{k}>=\left\langle\vec{k},\vec{i}\right\rangle=90^\circ$$

$$=1\times1\times0$$

$$\cos 90^\circ=0$$

$$=1$$

$\therefore$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=0$$

同理

$$\vec{j}\cdot\vec{k}=0$$

$$\vec{k}\cdot\vec{i}=1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$$

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

設

$$\vec{a} =< a_x, a_y, a_z > \qquad \vec{b} =< b_x, b_y, b_z >$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \qquad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$

$$= a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \cdot \vec{k}$$

$$+ a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j} + a_x b_z \vec{j} \cdot \vec{k}$$

$$+ a_z b_x \vec{k} \cdot \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \cdot \vec{k}$$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$$

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

設

$$\vec{a} = < a_x, a_y, a_z > \qquad \vec{b} = < b_x, b_y, b_z >$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

練習

$$\vec{a} = < -1,3,2 > \qquad \vec{b} = < 5,-1,1 >$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1) \times 5 + 3 \times (-1) + 2 \times 1 = -6$$

練習

$$\vec{a} = <1, -3, 0> \qquad \vec{b} = <2, -1, 10>$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + (-3) \times (-1) + 0 \times 10 = 5$$

設

$$\vec{a} = < a_x, a_y, a_z > \neq \vec{0} \qquad \vec{b} = < b_x, b_y, b_z > \neq \vec{0}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

證明於下一頁

設

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\cos 90^\circ = 0$

$\Leftrightarrow$ $\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos < \vec{a}, \vec{b} >= 0$

$\Leftrightarrow$ $\cos < \vec{a}, \vec{b} >= 0$

$\Leftrightarrow$ $< \vec{a}, \vec{b} >= 90^\circ$

$\Leftrightarrow$ $\vec{a} \perp \vec{b}$

設

$$\vec{a} = < a_x, a_y, a_z > \neq \vec{0} \qquad \vec{b} = < b_x, b_y, b_z > \neq \vec{b}$$

$$\left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cos < \vec{a}, \vec{b} > = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\cos < \vec{a}, \vec{b} > = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left\|\vec{a}\right\| \left\|\vec{b}\right\|}$$

$$\cos < \vec{a}, \vec{b} > = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

設 $\vec{a} = < a_x, a_y, a_z > \neq \vec{0}$ $\vec{b} = < b_x, b_y, b_z > \neq \vec{0}$

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ 為 $\vec{a}$ 的方向角

$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ 為 $\vec{b}$ 的方向角

$a_x = \left\|\vec{a}\right\| \cos\alpha_1$ $a_y = \left\|\vec{a}\right\| \cos\beta_1$ $a_z = \left\|\vec{a}\right\| \cos\gamma_1$

$b_x = \left\|\vec{b}\right\| \cos\alpha_2$ $b_y = \left\|\vec{b}\right\| \cos\beta_2$ $b_z = \left\|\vec{b}\right\| \cos\gamma_2$

$$\left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cos <\vec{a},\vec{b}>$$

$$a_x = \left\|\vec{a}\right\| \cos\alpha_1 \quad a_y = \left\|\vec{a}\right\| \cos\beta_1 \quad a_z = \left\|\vec{a}\right\| \cos\gamma_1$$

$$b_x = \left\|\vec{b}\right\| \cos\alpha_2 \quad b_y = \left\|\vec{b}\right\| \cos\beta_2 \quad b_z = \left\|\vec{b}\right\| \cos\gamma_2$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$= \left\|\vec{a}\right\| \cos\alpha_1 \left\|\vec{b}\right\| \cos\alpha_2 + \left\|\vec{a}\right\| \cos\beta_1 \left\|\vec{b}\right\| \cos\beta_2 + \left\|\vec{a}\right\| \cos\gamma_1 \left\|\vec{b}\right\| \cos\gamma_2$$

$$= \left\|\vec{a}\right\| \left\|\vec{b}\right\| (\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2)$$

则 $\cos <\vec{a},\vec{b}> = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2$

設

$$\vec{a} = \langle a_x, a_y, a_z \rangle \neq \vec{0} \qquad \vec{b} = \langle b_x, b_y, b_z \rangle \neq \vec{b}$$

$$\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

$$\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2$$

公式複習

$$\cos 0^\circ = 1$$

$$\cos 180^\circ = -1$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 90^\circ = 0$$

測驗

$\cos 0° =$

$\cos 180° =$

$\cos 30° =$

$\cos 150° =$

$\cos 45° =$

$\cos 135° =$

$\cos 60° =$

$\cos 120°$

$\cos 90° =$

$\cos 0°$

公式複習

$\cos 0° = 1$

$\cos 180° = -1$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 60° = \frac{1}{2}$

$\cos 120° = -\frac{1}{2}$

$\cos 90° = 0$

例題4-4

已知三點 $A(2,1,3), B(3,2,3), C(3,1,4)$

求 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 之夾角 φ

$A(2,1,3), B(3,2,3), C(3,1,4)$

例題4-4 之解答

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$$

$$= \frac{<1,1,0>\cdot<1,0,1>}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{1^2+0^2+1^2}}$$

$$\frac{, \quad >}{\cdot(\quad)^2+(\quad)^2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

則 $\varphi = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

例題4- 5

已知 $\vec{a}=3\vec{i}-9\vec{j}+7\vec{k},\ \vec{b}=4\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$

求 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上投影

請以數學符號表示

$$prj_{\vec{b}}\vec{a}$$

$$\vec{a} = 3\vec{i} - 9\vec{j} + 7\vec{k}, \vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

例題4-5 之解答

$$prj_{\vec{b}}\vec{a} = \left\|\vec{a}\right\| \cos < \vec{a}, \vec{b} >$$

$$= \left\|\vec{a}\right\| \times \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left\|\vec{a}\right\| \left\|\vec{b}\right\|}$$

$$= \frac{< \quad , \quad , \quad > \cdot < \quad , \quad , \quad >}{\sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2 + (\quad)^2}}$$

則 $= \dfrac{12 + 18 + 28}{6} = \dfrac{29}{3}$

例題4- 6

已知 $\vec{a} = <-2,1,2>, \vec{b} = <2,0,-1>$

求 $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ 的長度

$\vec{a} = < -2,1,2 >, \vec{b} = < 4,-2,4 >$

例題4-6 之解答

$$\left\| \vec{c} \right\| = \left\| 3\vec{a} - 2\vec{b} \right\|$$

$$= \left\| < -6,3,6 > - < 4,0,-2 > \right\| \quad >\|$$

$$= \left\| < \quad , \quad , \quad > \right\|$$

$$= \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2 + (\quad)^2}$$

$$= \sqrt{173}$$

例題4- 7

已知 $\vec{a} = <1,-1,1>, \vec{b} = <2,0,1>, \vec{c} = <1,1,2>$

試選擇 k 使得 $k\vec{a} + \vec{b}$ 與 $\vec{c}$

互相垂直

$$\vec{a} = < 1,-1,1 >, \vec{b} = < 2,0,1 >, \vec{c} = < 1,1,2 >$$

例題4-7 之解答

$$(k\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{c}$$

$$\Leftrightarrow (k\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$$

$$\Leftrightarrow < \quad , \quad , \quad > \cdot < 1,1,2 > = 0 \quad 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\qquad 2k+4 \qquad} = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \underline{\quad -2 \quad}$$

例題4- 8

設 $\vec{a} = <1,1,0>, \vec{b} = <0,-1,1>$

試求 $\vec{a} + \vec{b}$ 與 $\vec{a}$ 的夾角 φ

$\vec{a} = <1,1,0>, \vec{b} = <0,-1,1>$

例題4-8 之解答

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}}{\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|\left\|\vec{a}\right\|}$$

$$= \frac{<\ \ ,\ \ ,\ \ >\cdot<\ \ ,\ \ ,\ \ >}{\sqrt{(\ \ )^2+(\ \ )^2+(\ \ )^2}\sqrt{(\ \ )^2+(\ \ )^2+(\ \ )^2}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

則 $\varphi = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

向量外積

兩向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的外積是一個向量

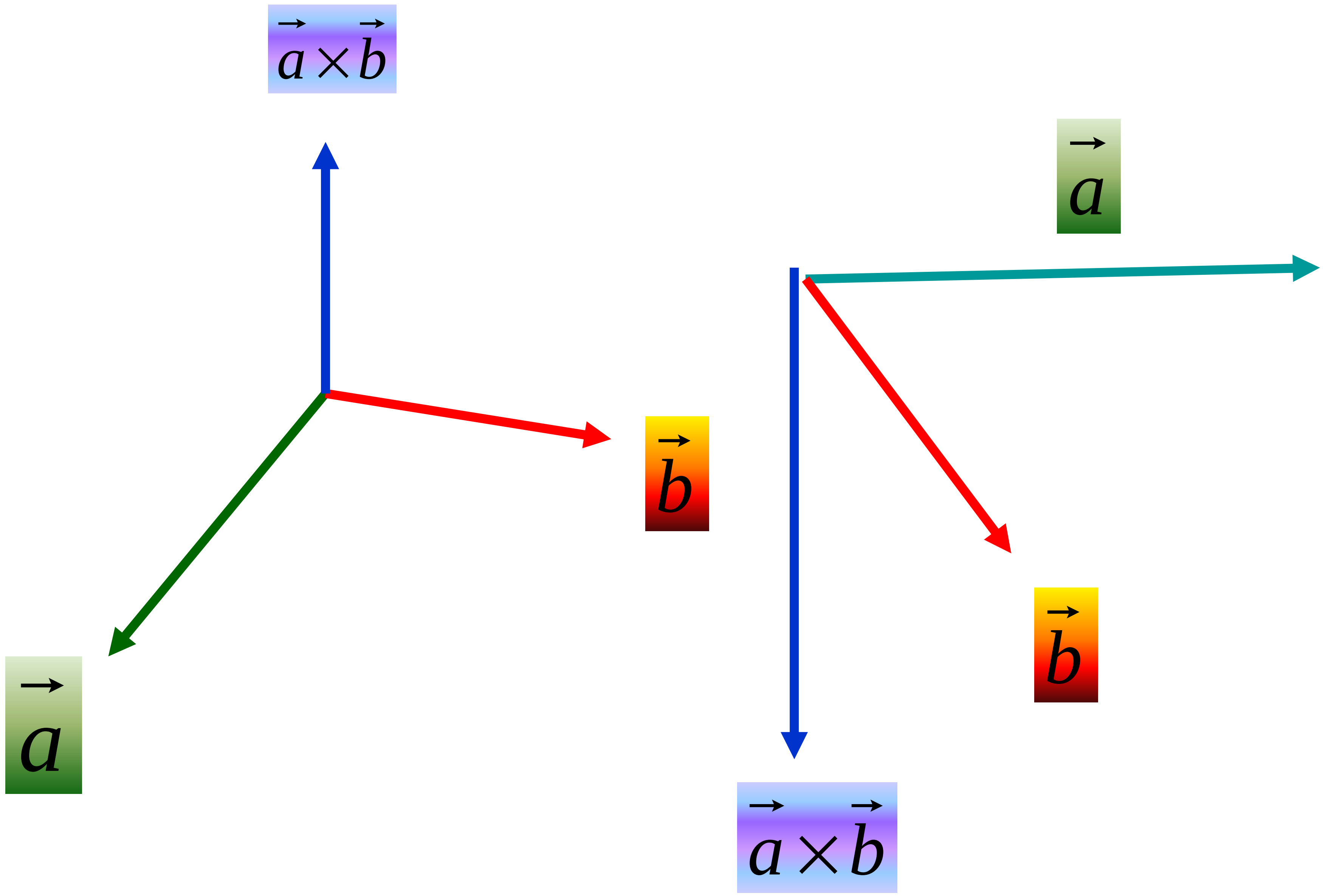
它滿足下列三個條件

(1) 它的大小: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin<\vec{a},\vec{b}>$

(2) 它的方向: 垂直於 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所決定的平面

即 $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$ 且 $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$

(3) $\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ 構成右手系



$\vec{a} \times \vec{b}$
$\vec{b}$
$\vec{a}$
$\vec{a}$
$\vec{b}$
$\vec{a} \times \vec{b}$

測驗

兩向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的外積是一個向量

它滿足下列三個條件

(1) 它的大小: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin<\vec{a},\vec{b}>$

(2) 它的方向: 垂直於 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所決定的 平面

即 $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$ 且 $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$

(3) $\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ 構成 右手 系

$$= \frac{<\ ,\ ,\ >\cdot<\ ,\ ,\ >}{\sqrt{(\ )^2+(\ )^2+(\ )^2}\sqrt{(\ )^2+(\ )^2+(\ )^2}}$$

$\varphi =$ $\frac{1}{2}$ $(3,1,4)$ $=$

兩向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的外積是一個向量

它滿足下列三個條件

(1) 它的大小: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin<\vec{a},\vec{b}>$

(2) 它的方向: 垂直於 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所決定的平面

即 $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$ 且 $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$

(3) $\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ 構成右手系

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

證明: $\vec{a} \parallel \vec{b}$

$\Leftrightarrow$ $<\vec{a}, \vec{b}>= 0^\circ$ 或 $<\vec{a}, \vec{b}>= 180^\circ$

$\Leftrightarrow$ $\sin<\vec{a}, \vec{b}>= 0$

$\Leftrightarrow$ $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin <\vec{a}, \vec{b}>= 0$

$\Leftrightarrow$ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

向量外積之運算規律

(1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ (反交換律)

(2) $(k\vec{a})\times\vec{b}=k(\vec{a}\times\vec{b})$

$\vec{a}\times(k\vec{b})=k(\vec{a}\times\vec{b})$ (結合律)

(3) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ (分配律)

$\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}$

$$\left|\vec{i}\times\vec{i}\right| = \left\|\vec{i}\right\|\left\|\vec{i}\right\| \sin < \vec{i}, \vec{i} >$$

$$= 1 \times 1 \times \sin 0^\circ$$

$$= 1 \times 1 \times 0$$

$$= 0$$

$$\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1$$

$$< \vec{i}, \vec{i} > = < \vec{j}, \vec{j} > = \left\langle \vec{k}, \vec{k} \right\rangle = 0^\circ$$

$$\sin 0^\circ = 0$$

$\therefore$

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{0}$$

同理

$$\vec{j}\times\vec{j} = \vec{0}$$

$$\vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}$$

$$\left|\vec{i}\times\vec{j}\right| = \left\|\vec{i}\right\|\left\|\vec{j}\right\| \sin<\vec{i},\vec{j}>$$

$$\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1$$

$$= 1\times 1\times \sin 90^\circ$$

$$<\vec{i},\vec{j}> = <\vec{j},\vec{k}> = \left\langle \vec{k},\vec{i} \right\rangle = 90^\circ$$

$$= 1\times 1\times 1$$

$$= 1$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$\therefore$

$$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$$

同理

$$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$$

$$\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$$

$$\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

設 $\vec{a} = \langle a_x, a_y, a_z \rangle \qquad \vec{b} = \langle b_x, b_y, b_z \rangle$

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$$

$$= a_xb_x\vec{i}\times\vec{i} + a_xb_y\vec{i}\times\vec{j} + a_xb_z\vec{i}\times\vec{k}$$

$$+ a_yb_x\vec{j}\times\vec{i} + a_yb_y\vec{j}\times\vec{j} + a_yb_z\vec{j}\times\vec{k}$$

$$+ a_zb_x\vec{k}\times\vec{i} + a_zb_y\vec{k}\times\vec{j} + a_zb_z\vec{k}\times\vec{k}$$

$$= a_xb_y\vec{k} - a_xb_z\vec{j}$$

$$- a_yb_x\vec{k} + a_yb_z\vec{i}$$

$$+ a_zb_x\vec{j} - a_zb_y\vec{i}$$

$$= (a_yb_z - a_zb_y)\vec{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k}$$

$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{0}$

$\vec{j}\times\vec{j} = \vec{0}$

$\vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}$

$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$

$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$

$\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_y b_z-a_z b_y)\vec{i}+(a_z b_x-a_x b_z)\vec{j}+(a_x b_y-a_y b_x)\vec{k}$$

利用三階行列式記號

上式可改寫為

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

$$\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{b} \iff \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$$

證明: $\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{b}$

$$\Rightarrow \langle a_x, a_y, a_z\rangle = k\langle b_x, b_y, b_z\rangle$$

$$\Rightarrow a_y b_z - a_z b_y = kb_y b_z - kb_z b_y = 0$$

$$a_x b_z - a_z b_x = kb_x b_z - kb_z b_x = 0$$

$$a_x b_y - a_y b_x = kb_x b_y - kb_x b_y = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$$

$$\vec{a} \; // \; \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

證明: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

$\Rightarrow$

$$a_y b_z - a_z b_y = 0$$

$$a_x b_z - a_z b_x = 0$$

$$a_x b_y - a_y b_x = 0$$

假設 $b_x \neq 0$

則

$$a_x = \frac{a_x}{b_x} b_x$$

$$a_y = \frac{a_x}{b_x} b_y$$

$$a_z = \frac{a_x}{b_x} b_z$$

$$\vec{a} \;//\; \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

證明: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ 假設 $b_x \neq 0$

$$\Rightarrow \quad a_x = \frac{a_x}{b_x} b_x \qquad a_y = \frac{a_x}{b_x} b_y \qquad b_z - a_z = \frac{a_x}{b_x} b_z$$

$$\Rightarrow \quad \langle a_x, a_y, a_z \rangle = \underline{\quad \frac{a_x}{b_x} \quad} \langle b_x, b_y, b_z \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} \;//\; \vec{b}$$

例題4-9

已知 $\vec{a}=\langle 2,-3,1\rangle$ $\vec{b}=\langle -1,1,-2\rangle$

試求與 $\vec{a}\times\vec{b}$ 同方向之單位向量

例題4-9之解答

已知 $\vec{a}=\langle 2,-3,1\rangle$ $\vec{b}=\langle -1,1,-2\rangle$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 1\\ -1 & 1 & -2\end{vmatrix}$$

例題4-9之解答

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 1\\ -1 & 1 & -2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}\vec{i}\quad-\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & -2\end{vmatrix}\vec{j}\quad+\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

例題4-9之解答

$$\vec{a} \times \vec{b} =$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} \quad - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} \quad + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= [(-3)(-2) - 1\times 1]\vec{i} \quad - [2\times(-2) - (-1)\times 1]\vec{j} \quad + [2\times 1 - (-3)\times(-1)]\vec{k}$$

$$= \quad = 5\vec{i} \quad + 3\vec{j} \quad - \vec{k}$$

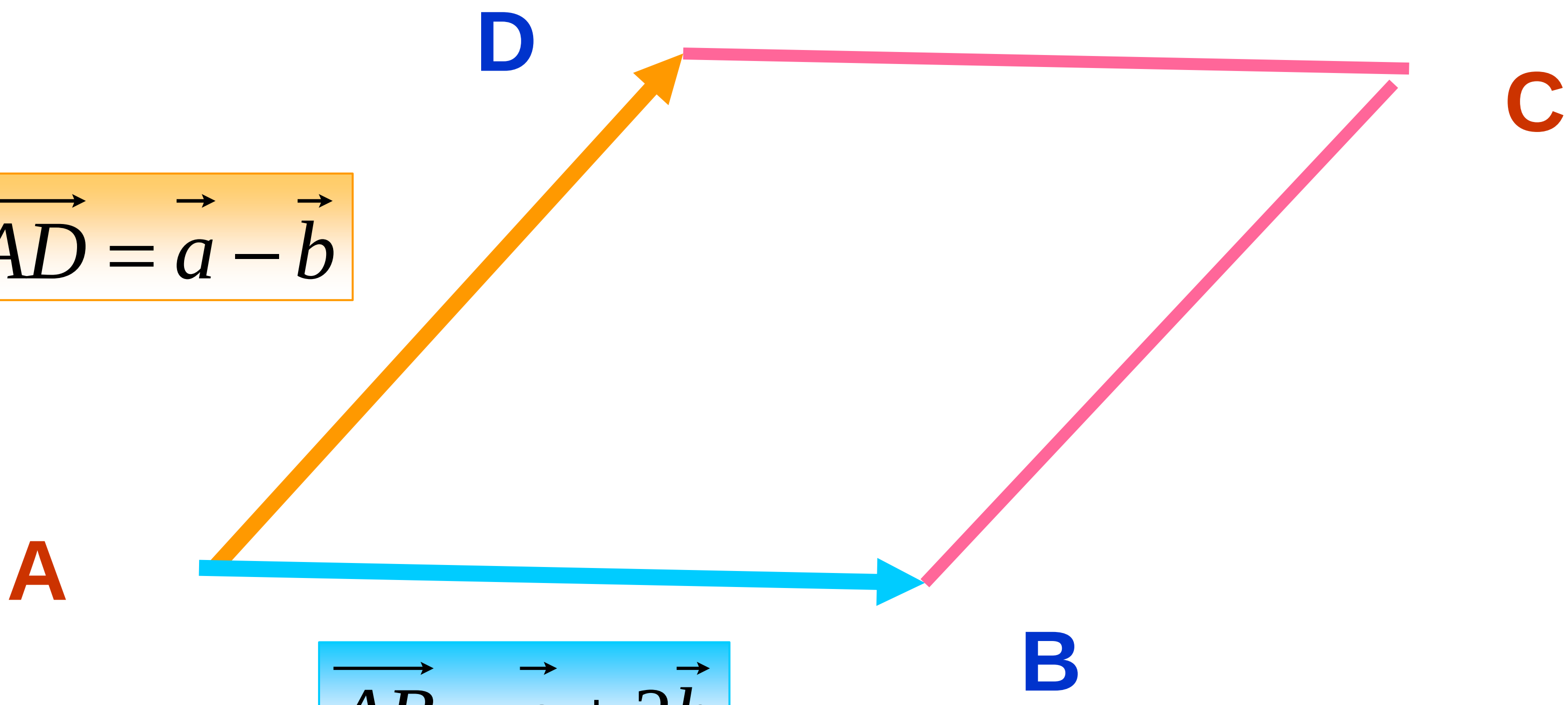
例題4-10

已知 $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}$ $\overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{b}$

其中 $\left\|\vec{a}\right\| = 4$ $\left\|\vec{b}\right\| = 3$ $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \frac{\pi}{6}$

求平行四邊形**ABCD**的面積

例題4-10 之解答



$$\overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}$$

平行四邊形**ABCD**的面積 $= \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right\|$

$\overrightarrow{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}$ $\overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{b}$

例題4-10 之解答

平行四邊形**ABCD**的面積 $= \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right\|$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ $= (\vec{a} + 2\vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$

$= \vec{a} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} + 2\vec{b} \times \vec{a} - 2\vec{b} \times \vec{b}$

$= \vec{0} + \vec{b} \times \vec{a} + 2\vec{b} \times \vec{a} + \vec{0}$

$= 3\vec{b} \times \vec{a}$

例題4-10 之解答

平行四邊形**ABCD**的面積 $= \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right\|$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ $= 3\vec{b} \times \vec{a}$

$\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right\|$ $= 3\left\| \vec{b} \times \vec{a} \right\|$

$= 3 \times$ $\left\| \vec{a} \right\| \left\| \vec{b} \right\| \sin \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$

$$\left\|\vec{a}\right\| = 4, \left\|\vec{b}\right\| = 3, \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \frac{\pi}{6}$$

解答

平行四邊形**ABCD**的面積 $= \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right\|$

$$= 3\left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\| \sin \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$$

$$= 3 \times 3 \times 4 \times \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= 36 \times \frac{1}{2} = 18$$

純量三重積

三向量的三重積

- 向量三重積 $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$
- 純量三重積 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$$

$$:= (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$$

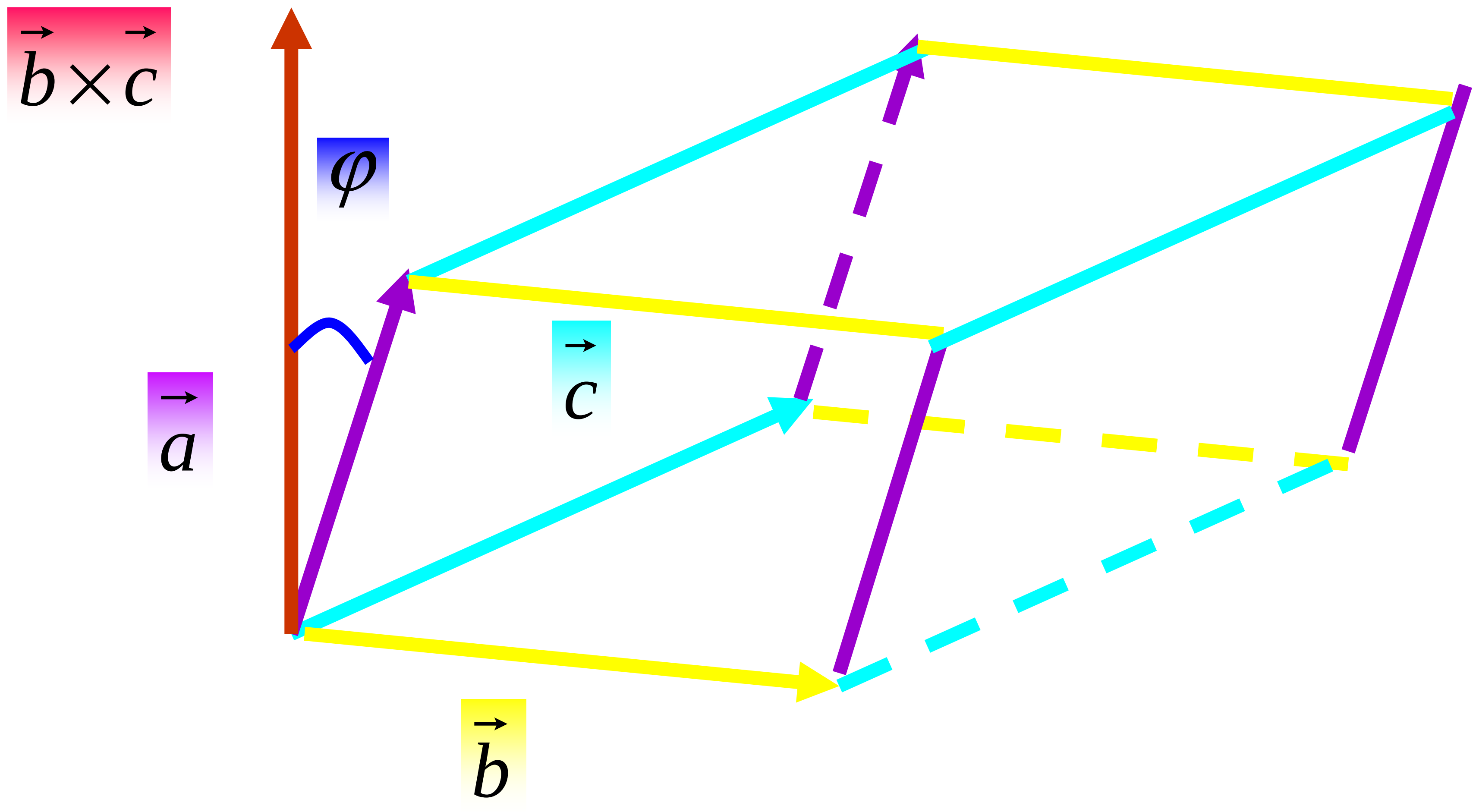
$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}) = (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$$

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = -(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})$$

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = -(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b})$$

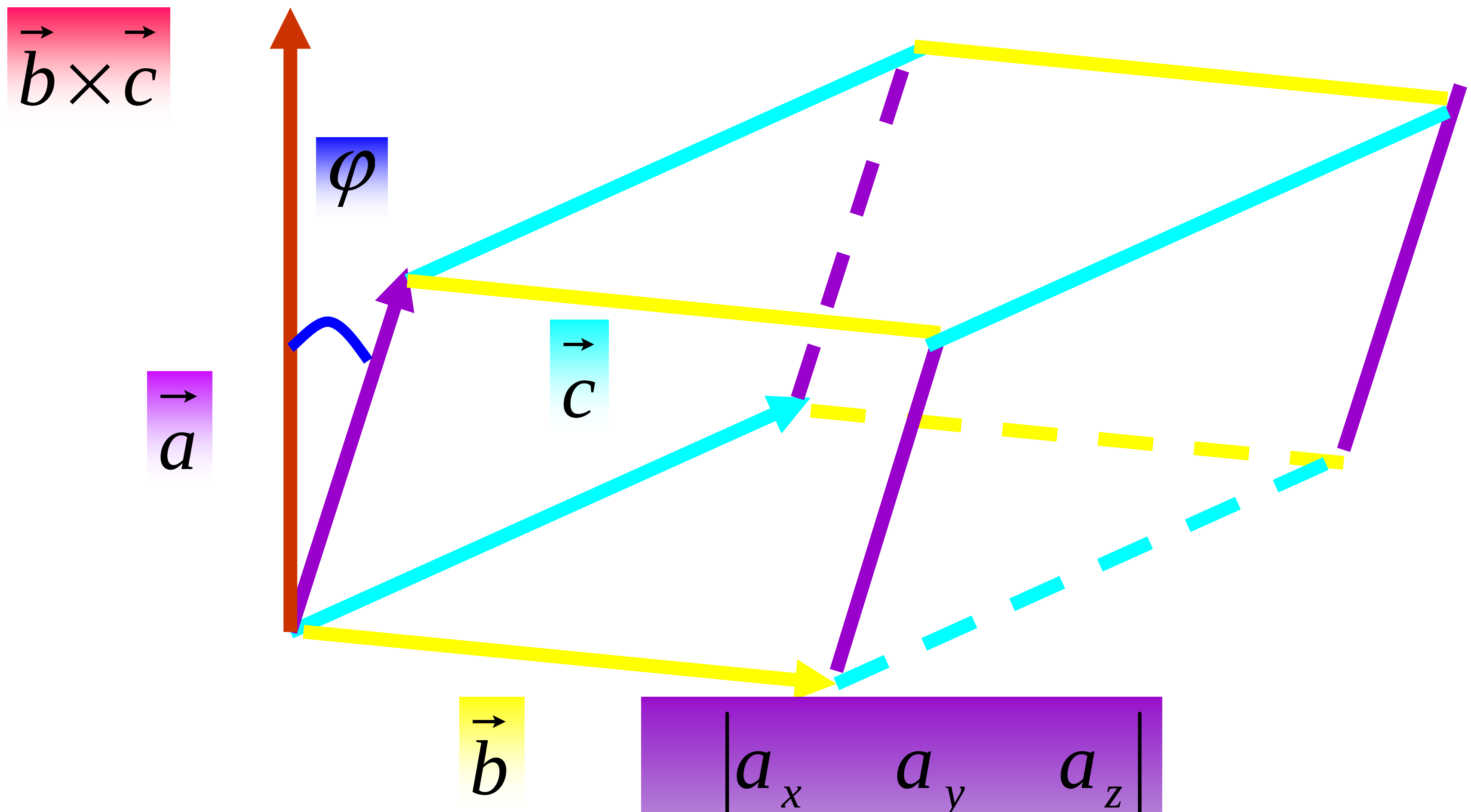
$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = -(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a})$$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$



六面體體積V=高X底面積=

$$\left\|\vec{a}\right\|\cos\varphi\left\|\vec{b}\times\vec{c}\right\| = \left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\times\vec{c}\right\|\cos\varphi = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$



六面體體積**V** $=\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right| = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ 的絕對值

例題4-11

求以 $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

$\vec{b} = \vec{j} + 7\vec{k}$

$\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{k}$

爲三稜的平行六面體之體積

例題4-11之解答

$$\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{b} = \vec{j} + 7\vec{k}$$

$$\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{k}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

平行六面體之體積=2