4-3 向量之向量式、曲線之弧長

.1.　向量函數、曲線之向量式

變向量的定義

模或方向會改變的向量稱爲

變向量

變向量的例子 (一)

質點作勻速圓周運動時

速度向量的模保持不變

但方向不斷改變

變向量的例子 (二)

質點作變速直線運動時

速度向量的方向保持不變

但模不斷改變

定義 4-1 向量函數

t :數量(t 爲時間或其他參數)

$\vec{A}$:變向量

若對於t在某個範圍內的每一個數值

$\vec{A}$ 都有一個確定的向量和它對應

定義 4-1 向量函數

則稱 $\vec{A}$ 爲變數t的向量函數

記作 $\vec{A} = \vec{A}(t)$

向量函數的坐標型態

$$\vec{A} = A_x(t)\vec{i} + A_y(t)\vec{j} + A_z(t)\vec{k}$$

$$= < A_x(t), A_y(t), A_z(t) >$$

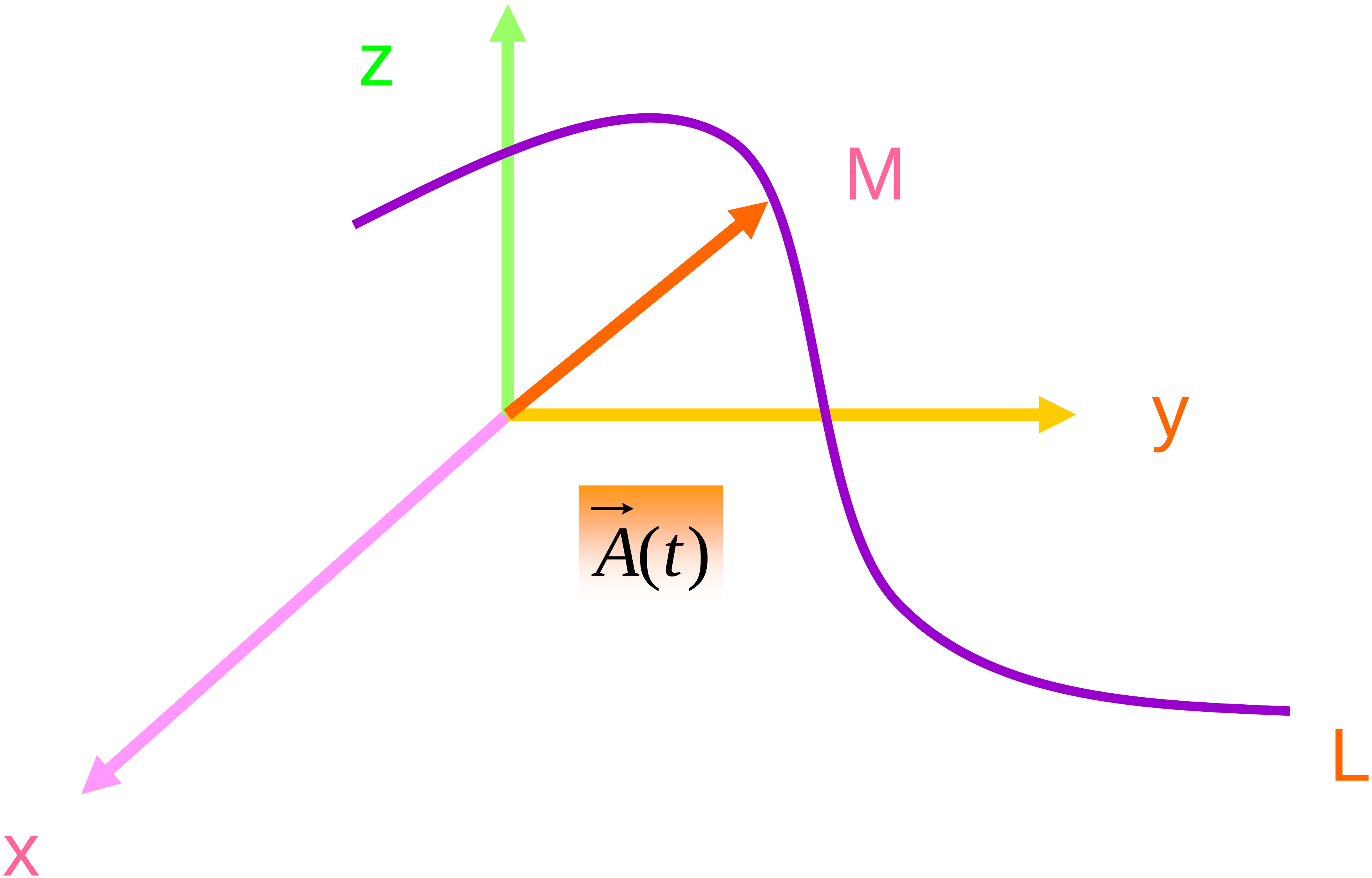
向量函數的端點曲線

將變數向量的始點固定在坐標原點

當t變化時

向量函數的終點 就會描繪出一條曲線L

這條曲線L叫做向量函數的端點曲線


z
M
y
$\vec{A}(t)$
L
x

端點曲線的例子(一)

只改變模的大小

而不改變方向的 向量函數

它的端點曲線是

通過座標原點的直線

端點曲線的例子(二)

只改變方向

而不改變模的　向量函數

它的端點曲線在

以原點爲球心，向量大小爲半徑的球面上

稱爲球面曲線

端點曲線的參數式方程式

當 $\vec{A}(t)$ 的始點取在座標原點時

$\vec{A}(t)$ 實際上成爲

終點 $M(x, y, z)$ 的向徑

因此

$$\begin{cases} x = A_x(t) \\ y = A_y(t) \\ z = A_z(t) \end{cases}$$

稱爲端點曲線L的參數式方程式

或寫成向量形式

$$\vec{r} = A_x(t)\vec{i} + A_y(t)\vec{j} + A_z(t)\vec{k}$$

$$= \langle A_x(t), A_y(t), A_z(t) \rangle$$

稱爲端點曲線的向量式方程式

参數式方程式$\longleftrightarrow$向量式方程式

已知曲線的向量式方程式

很容易寫出曲線之參數式方程式

反之亦然

參數式方程式→向量式方程式之例子

圓柱螺線的參數式方程式為

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$$

圓柱螺線的參數式方程式為

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$$

圓柱螺線的向量式方程式為

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + bt\,\vec{k}$$

$$= < a\cos t, a\sin t, bt >$$

例題4-12

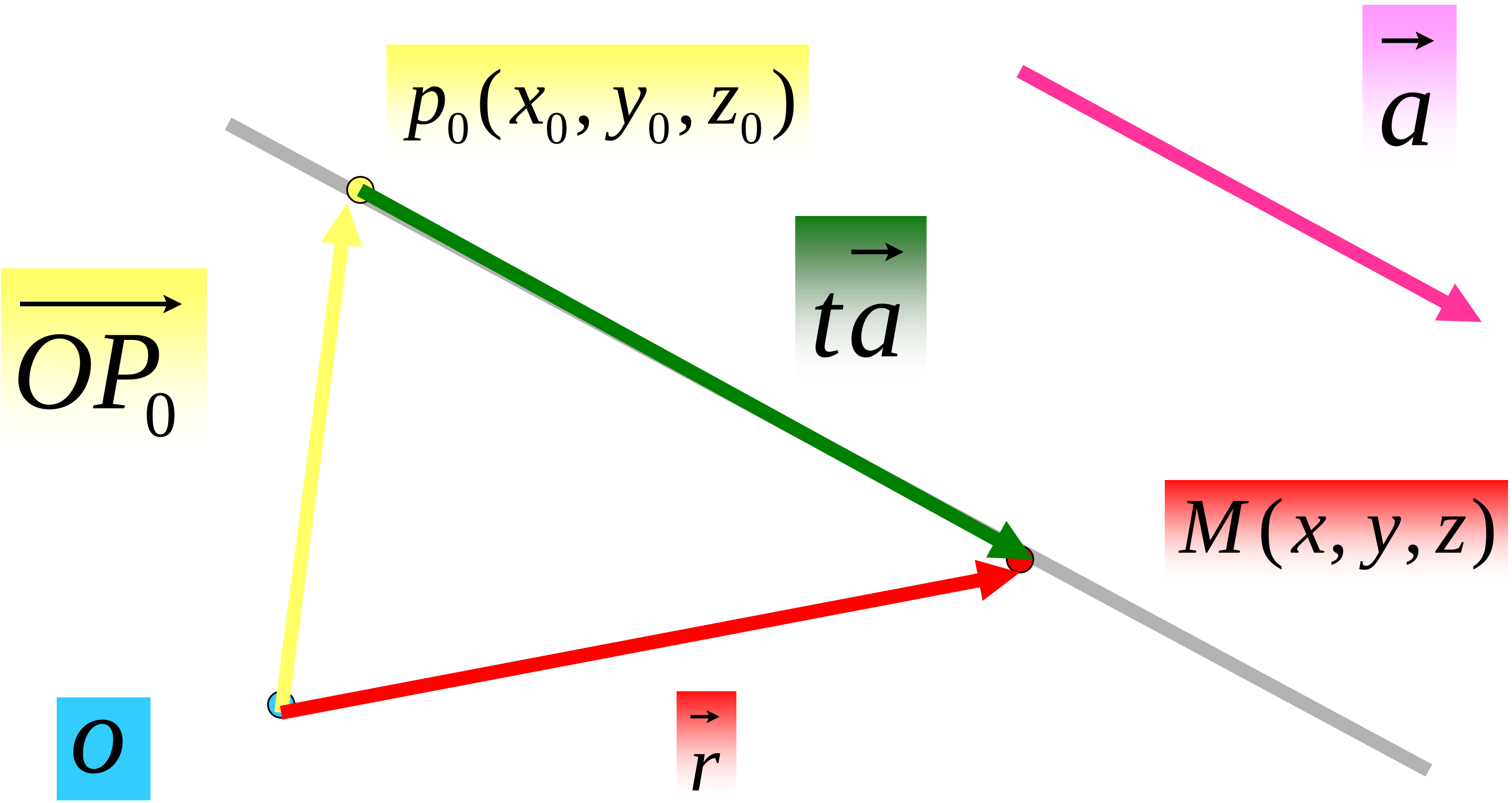
寫出點 $p_0(x_0, y_0, z_0)$

平行向量 $\vec{a} = < a_x, a_y, a_z >$

的直線方程式

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{a}$$

2 之解答



$$\vec{r} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{a}$$

$$\vec{r} = < x_0, y_0, z_0 > + t < a_x, a_y, a_z >$$

$$\vec{r} = < x_0 + ta_x, y_0 + ta_y, z_0 + ta_z >$$

爲直線之向量式方程式

向量函數的坐標型態

則稱 $\vec{A}$ 爲變數t的向量函數

記作 $\vec{A} = \vec{A}(t)$ 它的坐標形式

$$\vec{A} = A_x(t)\vec{i} + A_y(t)\vec{j} + A_z(t)\vec{k}$$

.2.　向量函數的導數、切線向量

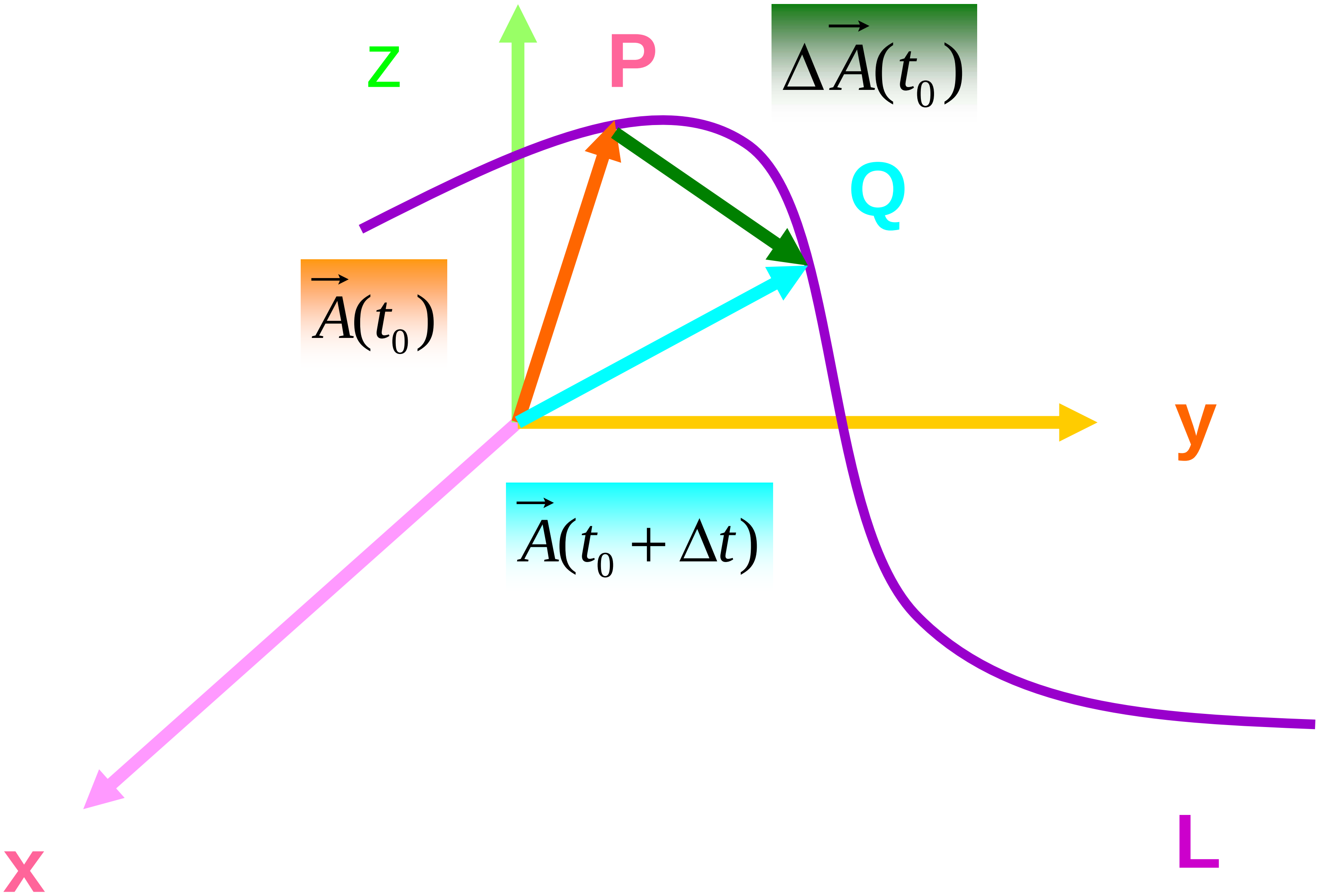
定義4-2

$\vec{A}(t)$:向量函數　　t_0 :定數

Δt :t_0 的增加量

$$\Delta\vec{A}(t_0)=\vec{A}(t_0+\Delta t)-\vec{A}(t_0):$$

$\vec{A}$ 從自變數t_0 變到$t_0+\Delta t$時的增量



z
P
$\Delta\vec{A}(t_0)$
Q
$\vec{A}(t_0)$
y
$\vec{A}(t_0+\Delta t)$
x
L

$$\frac{\Delta\vec{A}(t_0)}{\Delta t}=\frac{\vec{A}(t_0+\Delta t)-\vec{A}(t_0)}{\Delta t}$$

若下列極限存在

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{A}(t_0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{A}(t_0+\Delta t)-\vec{A}(t_0)}{\Delta t}$$

則稱此極限爲向量函數 $\vec{A}(t)$

在t_0處的導數向量

記作

$$\vec{A}'(t_0) = \frac{d\vec{A}(t_0)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{A}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{A}(t_0 + \Delta t) - \vec{A}(t_0)}{\Delta t}$$

若

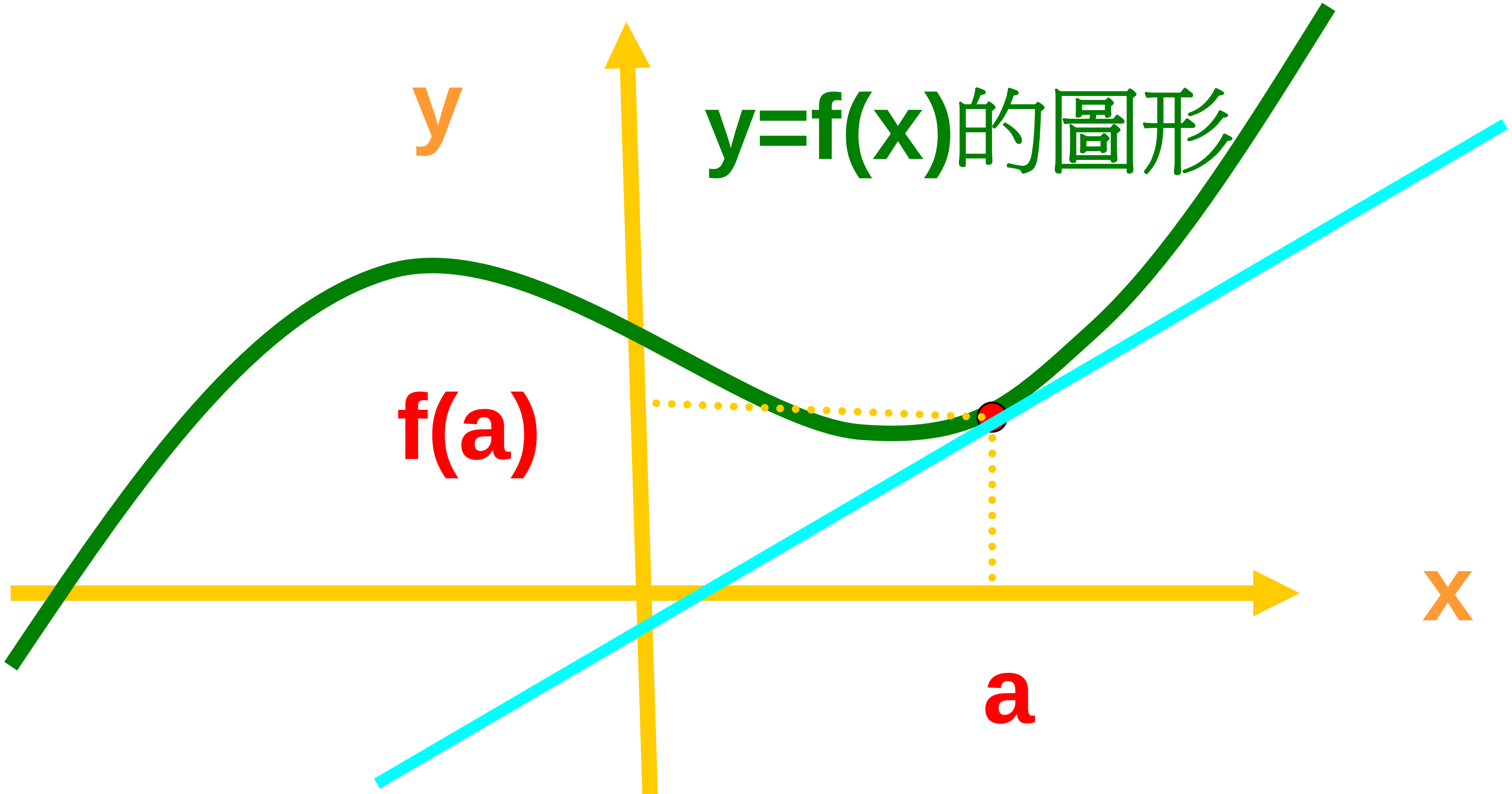
$$\vec{A}(t)=<A_x(t),A_y(t),A_z(t)>$$

则

$$\vec{A}'(t_0)=\frac{d\vec{A}(t_0)}{dt}=<A_x'(t_0),A_y'(t_0),A_z'(t_0)>$$

$$=<\frac{dA_x(t_0)}{dt},\frac{dA_y(t_0)}{dt},\frac{dA_z(t_0)}{dt}>$$

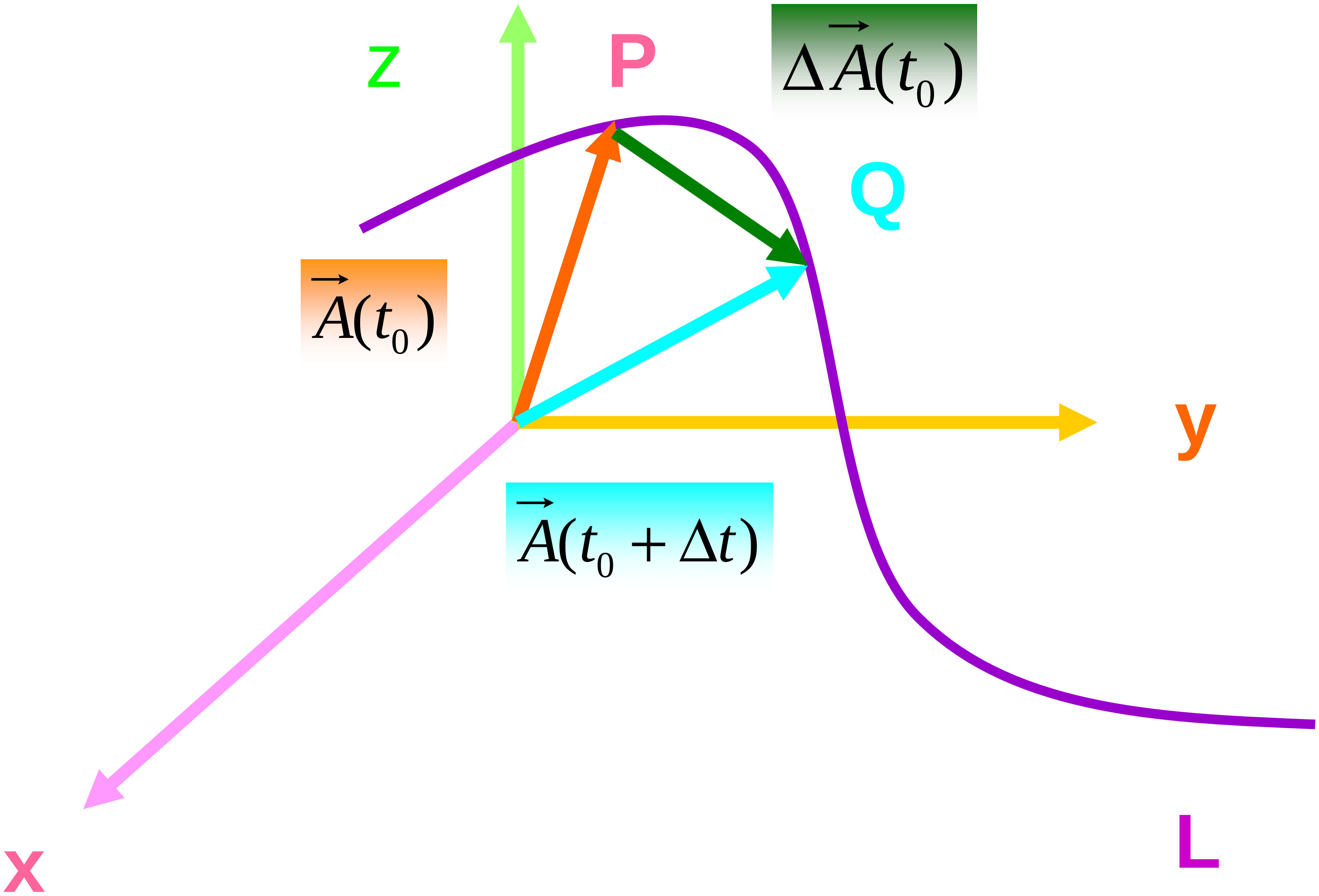
$$=\frac{dA_x(t_0)}{dt}\vec{i}+\frac{dA_y(t_0)}{dt}\vec{j}+\frac{dA_z(t_0)}{dt}\vec{k}$$



L:過點(a,f(a))的切線

L的斜率=

$$f'(a)=\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=a}$$



z
P
$\Delta\vec{A}(t_0)$
Q
$\vec{A}(t_0)$
y
$\vec{A}(t_0+\Delta t)$
x
L

$\dfrac{\Delta\vec{A}(t_0)}{\Delta t}$ 是**PQ**上一個向量

當 $\Delta t > 0$ 時，則與 $\Delta\vec{A}(t_0)$ 同方向

當 $\Delta t < 0$ 時，則與 $\Delta\vec{A}(t_0)$ 反方向

當 $\Delta t \to 0$ 時，PQ割線繞著P點轉動

且以點P處的切線為其極限的位置

因此，向量 $\dfrac{d\vec{A}(t_0)}{dt}$ 在點P處的切線上

其方向指向t增大的方向

若 $\vec{r} = \vec{A}(t)$ 是曲線的向量方程式

則 $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{A}(t)}{dt}$ 在曲線的切線上

而且指向增大的一方。

我們稱 $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{A}(t)}{dt}$ 爲曲線 $r = \vec{A}(t)$

的 切線向量

例題 4-13

求三次扭曲線 $\vec{r} = < at, bt^2, ct^3 >$ 的切線向量

解：

$$\vec{r} = < at, bt^2, ct^3 >$$

所以曲線的切線向量爲

$$\vec{r}'(t) = < a, 2bt, 3ct^2 >$$

導數向量的性質

設 $f = f(t)$ 為純量函數

$\vec{A} = \vec{A}(t), \vec{B} = \vec{B}(t), \vec{C} = \vec{C}(t)$ 為向量函數

則

(1) $$\frac{d(f\vec{A})}{dt} = \frac{df}{dt}\vec{A} + f\frac{d\vec{A}}{dt}$$

(2) $$\frac{d(\vec{A}\cdot\vec{B})}{dt}=\frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}$$

(3) $$\frac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{dt}=\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$$

(4) $$\frac{d}{dt}(\vec{A},\vec{B},\vec{C})=(\frac{d\vec{A}}{dt},\vec{B},\vec{C})+(\vec{A},\frac{d\vec{B}}{dt},\vec{C})+(\vec{A},\vec{B},\frac{d\vec{C}}{dt})$$

例題 4-14

試證:模爲常數的向量函數與其導數向量函數

互相垂直。

相當於證明:

$$\vec{A}(t)\cdot\vec{A}'(t)=0$$

例題 4-14 的證明:

設

$$\left\|\vec{A}(t)\right\| = c$$

則

$$\vec{A}(t)\cdot\vec{A}(t) = c^2$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{A}(t)\cdot\vec{A}(t)\right] = \frac{d}{dt}c^2$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{A}(t)\cdot\vec{A}(t)\right]=\frac{d}{dt}c^2$$

$$\vec{A}'(t)\cdot\vec{A}(t)+\vec{A}(t)\cdot\vec{A}'(t)=0$$

$$2\vec{A}'(t)\cdot\vec{A}(t)=0$$

$$\vec{A}'(t)\cdot\vec{A}(t)=0$$

因此 $\vec{A}'(t)\perp\vec{A}(t)$

模爲常數的向量爲球面向量

因此其幾何意義爲:

球面曲線的切向量與球半徑垂直

.3.　弧長參數

前面所研究的曲線 $\vec{r} = \vec{A}(t)$

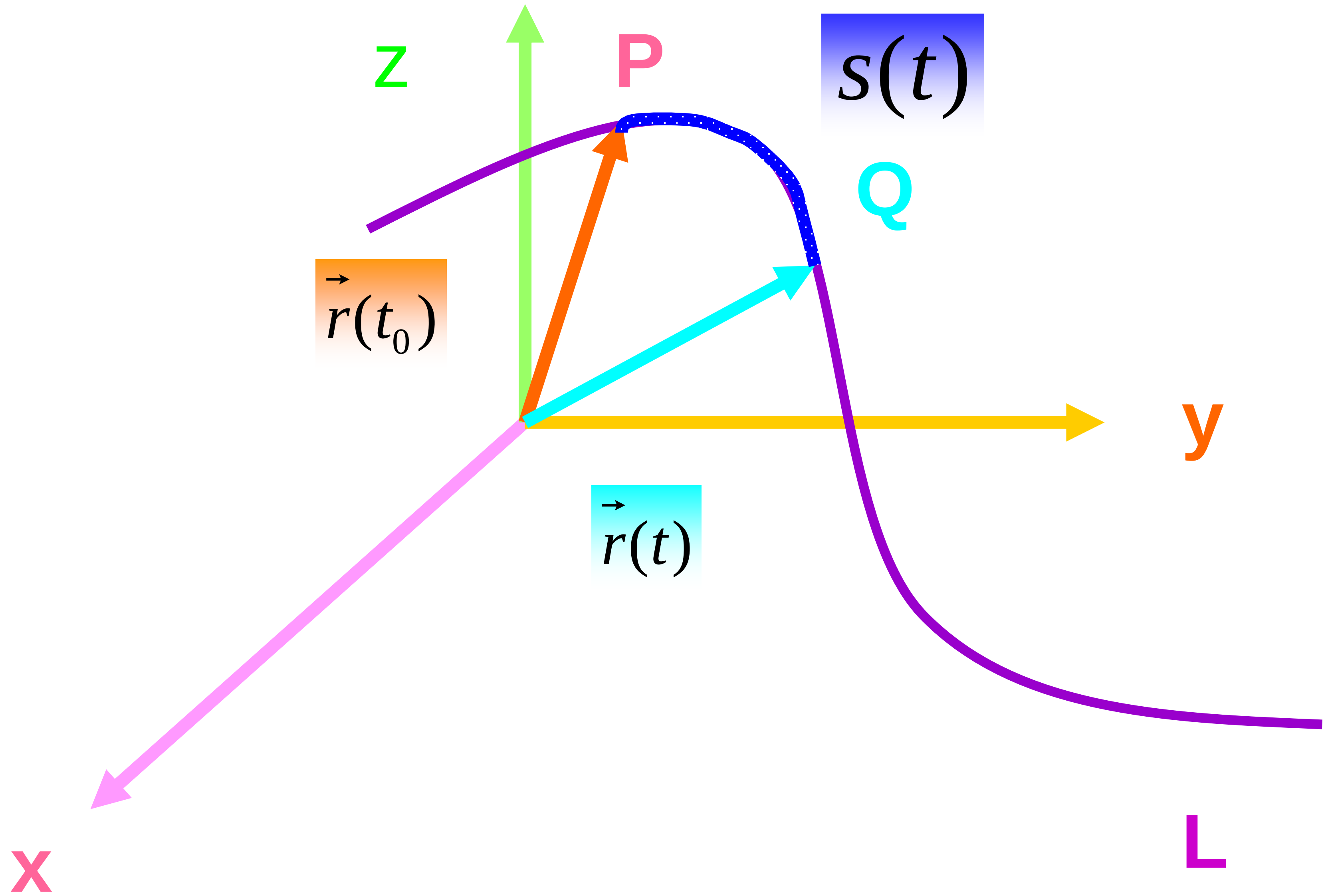
中參數**t** 可以是時間參數或其他參數

其中一個非常重要的參數是 **弧長S**

若把曲線弧長S作爲參數，

則曲線的眾多性質與公式有明確的意義

因此稱弧長S爲曲線的 **自然參數**


z
P
$s(t)$
Q
$\vec{r}(t_0)$
y
$\vec{r}(t)$
L
x

弧長公式

設曲線 $\vec{r} = \vec{r}(t) =< x(t), y(t), z(t) >$

則

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left\| \vec{r}' \right\| dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left\| \vec{r}' \right\| dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$$

$$\frac{d}{dt} s(t) = \left\| \vec{r}'(t) \right\| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$$

$$\frac{d}{dt}s(t) = \left\| \vec{r}'(t) \right\|$$

$$ds = \left\| \vec{r}'(t) \right\| dt$$

$$ds^2 = \left\| \vec{r}'(t) \right\|^2 dt^2$$

$$ds^2 = \vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) dt^2$$

$$ds^2 = \vec{r}(t)dt \cdot \vec{r}(t)dt$$

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}$$

$$d\vec{r} \cdot d\vec{r} = ds^2$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = 1$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{d\vec{r}}{ds}=1 \qquad \left\|\frac{d\vec{r}}{ds}\right\|=1$$

曲線弧長**s**做爲曲線方程式的參數時

切線向量 $\vec{\alpha}=\frac{d\vec{r}}{ds}$ 的模爲**1**

即切線向量是單位向量

練習4-3

1. 求曲線 $\vec{r} = \langle a\sin t, a\sin 2t, a\cos^2 t \rangle$

在 $t = \dfrac{\pi}{3}$ 的切線向量

解:

$$\vec{r} = \langle a\sin t, a\sin 2t, a\cos^2 t \rangle$$

$$\vec{r}'(t) = \langle a\cos t, 2a\cos 2t, -2a\cos t\sin t \rangle$$

$$\vec{r}'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left\langle a\cos\frac{\pi}{3}, 2a\cos\frac{2\pi}{3}, -2a\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} \right\rangle$$

$$\vec{r}\,'(\frac{\pi}{3}) = < a\cos\frac{\pi}{3}, 2a\cos\frac{2\pi}{3}, -2a\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} >$$

$$\vec{r}\,'(\frac{\pi}{3}) = < a\times\frac{1}{2}, 2a\times(-\frac{1}{2}), -2a\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} >$$

$$\vec{r}\,'(\frac{\pi}{3}) = < \frac{a}{2}, -a, -\frac{\sqrt{3}}{2}a >$$

練習4-3

2.求圓柱曲線 $\vec{r} = \langle 2\cos t, 2\sin t, t \rangle$

在 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 的切線向量

解:

$$\vec{r} = < 2\cos t, 2\sin t, t >$$

$$\vec{r}\,'(t) = < -2\sin t, 2\cos t, 1 >$$

$$\vec{r}\,'\left(\frac{\pi}{4}\right) = < -2\sin\frac{\pi}{4}, 2\cos\frac{\pi}{4}, 1 >$$

$$\vec{r}\,'(\frac{\pi}{4}) = < -2\sin\frac{\pi}{4}, 2\cos\frac{\pi}{4}, 1 >$$

$$\vec{r}\,'(\frac{\pi}{4}) = < -2\times\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 >$$

$$\vec{r}\,'(\frac{\pi}{4}) = < -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1 >$$

練習4-3

2.求曲線 $\vec{r} = \langle t\sin t, t\cos t, te^{t} \rangle$

在 $t = 0$ 的切線向量

解:

$$\vec{r} = < t\sin t, t\cos t, te^{t} >$$

$$\vec{r}'(t) =$$

$$< \sin t + t\cos t, \cos t - t\sin t, e^{t} + te^{t} >$$

$$\vec{r}\,'(t) =$$

$$< \sin t + t\cos t, \cos t - t\sin t, e^t + te^t >$$

$$\vec{r}\,'(0) =$$

$$< \sin 0 + 0\cos 0, \cos 0 - 0\sin 0, e^0 + 0e^0 >$$

$$= < 0, 1, 1 >$$